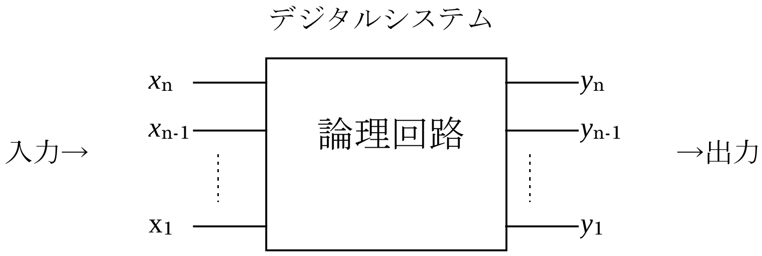
第１回

1. イントロダクション

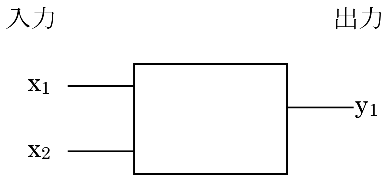


$x_k, y_k \in \{0,1\}$　　（２値変数）

組み合わせ回路：　出力の値が入力の順序によらない
順序回路：　入力の値とその順序によって出力値が変化する

例）　２つの２値変数 x_1, x_2 の比較を行う組み合わせ回路

入力変数：　x_1, x_2
出力変数：　y_1



動作の定義：　$x_1 = x_2$ の時　$y_1 = 0$
　　　　　　　$x_1 \neq x_2$ の時　$y_1 = 1$

動作の定義を組み合わせ表で表現する

x_1	x_2	y_1
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	0	1

y_1 は x_1, x_2 の「論理関数」⇒どのようにして論理式や論理回路表現を導くか。どう簡単化するか。

2. 論理代数とその基本演算

論理変数

$x \in \{0,1\} \equiv B$　　（２値変数: 本講義）
$x \in \{0,1,a,b\} \equiv B$　（４値変数）
....
多値変数の論理回路を考えることもできる

基本演算の定義

ここでは論理変数のとり得る値として $x \in \{0,1\}$ を採用する（２値変数）。

NOT 演算の定義

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

OR 演算の定義

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	1	1
1	0	1

AND 演算の定義

x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	1	1
1	0	0

10 の基本性質

	NOT	OR	AND	
1)	$\bar{\bar{x}} = x$			２重否定
2)		$1 \vee x = 1$	$0x = 0$	零元
3)		$0 \vee x = x$	$1x = x$	単位元
4)		$\bar{x} \vee x = 1$	$\bar{x}\,x = 0$	相補則
5)		$x \vee x = x$	$x\,x = x$	同一則
6)		$x \vee y = y \vee x$	$x\,y = yx$	交換則
7)		$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	$(x\,y)z = x(yz)$	結合則
8)		$x(y \vee z) = (xy) \vee (xz)$	$x \vee (yz) = (x \vee y)(x \vee z)$	分配則
9)		$x \vee (xy) = x$	$x(x \vee y) = x$	吸収則
10)		$\overline{x \vee y} = \bar{x}\,\bar{y}$	$\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$	De Morgan 則

上記 1)～10)の等式をブール代数の公理系と呼ぶ。

問題　De Morgan の定理を証明せよ

証明 1)　y=0 を代入　(左辺)=$\overline{x \vee 0} = \bar{x}$

(右辺)=$\bar{x}\,\bar{0} = \bar{x}$　∴(左辺)=(右辺)

y=1 を代入　(左辺)=$\overline{x \vee 1} = 0$

(右辺)=$\bar{x}\,\bar{1} = 0$　∴(左辺)=(右辺)　』

証明 2)　組み合わせ表による証明

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x}\,\bar{y}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0

問題　9)の吸収則を証明せよ

問題　集合 $B \equiv \{0,1,a,b\}$ がブール代数の公理系を満たすように NOT,OR,AND 演算を定義しな

さい。

NOT の定義

x	$\bar{x}$	
0	1	
1	0	
a	b	2 重否定
b	a	2 重否定

OR の定義

x	y	$x \vee y$	
0	0	0	
0	1	1	
1	1	1	
1	0	1	
0	a	a	単位元
a	0	a	
1	a	1	零元
a	1	1	
0	b	b	
b	0	b	
1	b	1	
b	1	1	
a	a	a	同一則
a	b	1	相補則
b	a	1	交換則
b	b	b	

AND の定義

x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	1	1
1	0	0
0	a	0
a	0	0
1	a	a
a	1	a
0	b	0
b	0	0
1	b	b
b	1	b
a	a	a
a	b	0
b	a	0
b	b	b

確認：De Morgan, 吸収則

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\overline{xy}$	$\overline{x \vee y}$	$x \vee (xy)$	

演算順序の定義

1) NOT
2) AND
3) OR

指数の定義

$x^1 = x$, $x^0 = \bar{x}$

一般的表記： x^α ($\alpha = 0$ or 1)

双対原理

以下のような論理恒等式があったとき
1 と 0 を入れ替え、さらに、∨と ・ を入れ替えた下段の恒等式も同様に成り立つ。

$$E_1(x_n^{\alpha_n}, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \ldots x_1^{\alpha_1}, 1, 0, \vee, \bullet) = E_2(x_n^{\alpha_n}, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \ldots x_1^{\alpha_1}, 1, 0, \vee, \bullet)$$

$$E_1(x_n^{\alpha_n}, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \ldots x_1^{\alpha_1}, 0, 1, \bullet, \vee) = E_2(x_n^{\alpha_n}, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \ldots x_1^{\alpha_1}, 0, 1, \bullet, \vee)$$

証明)

$$E_1(x_n^{\alpha_n}, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \ldots x_1^{\alpha_1}, 1, 0, \vee, \bullet) = E_2(x_n^{\alpha_n}, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \ldots x_1^{\alpha_1}, 1, 0, \vee, \bullet)$$

両辺の NOT をとって

$$\Leftrightarrow \overline{E_1(x_n^{\alpha_n}, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \ldots x_1^{\alpha_1}, 1, 0, \vee, \bullet)} = \overline{E_2(x_n^{\alpha_n}, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \ldots x_1^{\alpha_1}, 1, 0, \vee, \bullet)}$$

De Morgan の定理より

$$\Leftrightarrow \boxed{E_1(\overline{x_n^{\alpha_n}}, \overline{x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}, \ldots \overline{x_1^{\alpha_1}}, 0, 1, \bullet, \vee) = E_2(\overline{x_n^{\alpha_n}}, \overline{x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}, \ldots \overline{x_1^{\alpha_1}}, 0, 1, \bullet, \vee)}$$

あらためて $\overline{x_n^{\alpha_n}} \equiv x_n^{\alpha_n}$ などと表記し直せば

$$E_1(x_n^{\alpha_n}, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \ldots x_1^{\alpha_1}, 0, 1, \bullet, \vee) = E_2(x_n^{\alpha_n}, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \ldots x_1^{\alpha_1}, 0, 1, \bullet, \vee)$$

証明終』

ブール代数の公理系の表中、OR 列と AND 列の論理等式はお互いに双対の関係にある

不等号の定義

0<1

a) $x \leqq 1$
b) $x \geqq 0$
c) $x \leqq y \Leftrightarrow \bar{x} \vee y = 1 \Leftrightarrow x\bar{y} = 0$　　！論理不等式は等価な論理等式に変換できる

証明)

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$x \leqq y$	$\bar{x} \vee y = 1$
0	0	1	1	真	真
0	1	1	1	真	真
1	1	0	1	真	真
1	0	0	0	偽	偽

d) $x \leqq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow xy = x$

前半部の証明)
(→)
$\bar{x} \vee y = 1$ を仮定すると

$$x \vee y = 1 \cdot (x \vee y) = (\bar{x} \vee y)(x \vee y)$$
$$= \bar{x}x \vee \bar{x}y \vee yx \vee yy$$
$$= 0 \vee \bar{x}y \vee yx \vee y = y(\bar{x} \vee x) \vee y = y \vee y = y$$

(←)
$x \vee y = y$ を仮定すると
$\bar{x} \vee y = \bar{x} \vee (x \vee y) = (\bar{x} \vee x) \vee y = 1 \vee y = 1$　　前半部証明終わり　』

問題　　後半部 $x \leqq y \Leftrightarrow xy = x$ を証明せよ。