論理回路理論(A)　渡辺正裕
E-mail: watanabe@pe.titech.ac.jp
http://www.pe.titech.ac.jp/~watanabe/lecture/logic_circuit/index-j.htm

第 2 回

1. 論理関数とその表現

完全定義論理関数と不完全定義論理関数

例）　完全定義論理関数

x_1	x_2	$F(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	0	1

不完全定義論理関数

x_1	x_2	$F(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	0	*

Don’t care な組 ：
関数の定義上、0,1 のどちらに決めてもよい。

論理関数の極小項表現

n 変数論理関数を考える。

$F(x_n,x_{n-1},\dots,x_1)$

x_k のみに注目して $F(x_k)$ と書くことにすると、

$\boxed{F(x_k)=x_kF(1)\vee\overline{x_k}F(0)}$........(補題 1.4 教科書 p.10)

証明) $x_k= 0$, $x_k= 1$ をそれぞれ代入して、左右両辺が等しくなることを確かめる。

[極小項表現(シャノン展開)]

$$\boxed{\begin{aligned}F(x_n,x_{n-1},\dots,x_1)&=\bigcup_{(\alpha_n,\alpha_{n-1},\dots\alpha_1)}x_n^{\alpha_n}x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\dots x_1^{\alpha_1}F(\alpha_n,\alpha_{n-1},\dots,\alpha_1)\\&=\bigcup_{F(\alpha_n,\alpha_{n-1},\dots,\alpha_1)=1}x_n^{\alpha_n}x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\dots x_1^{\alpha_1}\end{aligned}}$$

ただし∪は論理和を意味する。

導出)

補題 1.4 を k=1 に適用すると

$$F(x_n,x_{n-1},\dots,x_1)=x_1F(x_n,x_{n-1},\dots,1)\vee\overline{x_1}F(x_n,x_{n-1},\dots,0)$$

k=2 に適用すると

$$=x_2\{x_1F(x_n,x_{n-1},\dots,1,1)\vee\overline{x_1}F(x_n,x_{n-1},\dots,1,0)\}\vee\overline{x_2}\{x_1F(x_n,x_{n-1},\dots,0,1)\vee\overline{x_1}F(x_n,x_{n-1},\dots,0,0)\}$$

$$=x_2x_1F(1,1)\vee x_2\overline{x_1}F(1,0)\vee\overline{x_2}x_1F(0,1)\vee\overline{x_2}\,\overline{x_1}F(0,0)$$

同様に k=3 に適用すると

$$
\begin{aligned}
= &\overline{x_3}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}F(0,0,0)\vee\\
&\overline{x_3}\,\overline{x_2}x_1F(0,0,1)\vee\\
&\overline{x_3}x_2x_1F(0,1,1)\vee\\
&\overline{x_3}x_2\overline{x_1}F(0,1,0)\vee\\
&x_3\overline{x_2}\,\overline{x_1}F(1,0,0)\vee\\
&x_3\overline{x_2}x_1F(1,0,1)\vee\\
&x_3x_2x_1F(1,1,1)\vee\\
&x_3x_2\overline{x_1}F(1,1,0)
\end{aligned}
$$

同様に k=n に適用すると極小項表現の表式が導出される。』

<u>極小項表現を用いれば、あらゆる論理関数は、NOT, AND, OR 演算の組み合わせで表現できる。</u>

(問題) 極小項表現の式を数学的帰納法で証明しなさい。

論理関数 $F(x_n,x_{n-1},....,x_1)$の極小項表現の求め方：

1) F の組み合わせ表を作成
2) F=1 となる変数の組み合わせの 1 つに注目し、それら変数の積をとる。その際、変数=1 ならそのまま、変数=0 なら NOT をとる。
3) F=1 となる変数の組み合わせ全部について上記の和を取る。

例1)　$F(x,y)=x\oplus y$
(排他的論理和)

定義：　$x=y$ の時　$F=0$
$x\neq y$ の時　$F=1$

x	y	F	
0	0	0	
0	1	1	$\boxed{\bar{x}y}$
1	1	0	
1	0	1	$\boxed{x\bar{y}}$

$$\therefore F(x,y)=x\oplus y=\bar{x}y\vee x\bar{y}$$

E-mail: watanabe@pe.titech.ac.jp
http://www.pe.titech.ac.jp/~watanabe/lecture/logic_circuit/index-j.htm

例 2)　3 変数多数決関数 (Majority function)

x_3	x_2	x_1	$F(x_3, x_2, x_1)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F(x_3, x_2, x_1) = \overline{x_3} x_2 x_1 \vee x_3 \overline{x_2} x_1 \vee x_3 x_2 \overline{x_1} \vee x_3 x_2 x_1$$

(問題)　$F(x, y)=x \vee y$ を極小項表現せよ

<u>極小項表現は最も簡単化された表現とは限らない。⇒**簡単化の手法が重要**</u>

(問題) お互いに異なる完全定義 n 変数論理関数は最大何個考えられるか

論理関数の極大項表現

$$\boxed{\begin{aligned} F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) &= \prod_{(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1)} x_n^{\overline{\alpha_n}} x_{n-1}^{\overline{\alpha_{n-1}}} \dots x_1^{\overline{\alpha_1}} F(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1) \\ &= \prod_{F(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1)=0} x_n^{\overline{\alpha_n}} x_{n-1}^{\overline{\alpha_{n-1}}} \dots x_1^{\overline{\alpha_1}} \end{aligned}}$$

証明)

$\overline{F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)}$ を極小項表現すると

$$\overline{F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1)} = \bigcup_{F(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1)=1} x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \dots x_1^{\alpha_1}$$

両辺の NOT を取って De Morgan の定理を適用

$$\begin{aligned} F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) &= \overline{\bigcup_{F(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1)=1} x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \dots x_1^{\alpha_1}} \\ &= \prod_{F(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1)=0} \left(\overline{x_n^{\alpha_n}} \vee \overline{x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}} \dots \vee \overline{x_1^{\alpha_1}}\right) \\ &= \prod_{F(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1)=0} \left(x_n^{\overline{\alpha_n}} \vee x_{n-1}^{\overline{\alpha_{n-1}}} \dots \vee x_1^{\overline{\alpha_1}}\right) \end{aligned}$$

(問題 2)「極小項表現の求め方」にならって、「極大項表現の求め方」を完成させなさい。

1) F の組み合わせ表を作成
2) F=0 となる変数の組み合わせの 1 つに注目し、それら変数の和をとる。その際、変数=0 ならそのまま、変数=1 なら NOT をとる。
3) F=0 となる変数の組み合わせ全部について上記の和を取る。

例)　３変数多数決関数の極大項表現

x_3	x_2	x_1	$F(x_3, x_2, x_1)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F(x_3, x_2, x_1) = (x_3 \vee x_2 \vee x_1)(x_3 \vee x_2 \vee \overline{x_1})(x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_1)(\overline{x_3} \vee x_2 \vee x_1)$$

(問題)　$F(x, y)=xy$ を極大項表現で表せ

x	y	F
0	0	0
0	1	0
1	1	1
1	0	0

$$\boxed{F = (x \vee y)(x \vee \overline{y})(\overline{x} \vee y)}$$

(問題)　$F(x, y) = x \oplus y$ を極大項表現で表せ

x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	0	1

$$\boxed{F = (x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y})}$$

論理代数方程式の一般形

あらゆる論理代数方程式は以下の形に帰着する

$$F(x, y, z, \dots) = 1$$

証明)

$A(x, y, z, \dots) = B(x, y, z, \dots)$

なる方程式があったとすると、

A=B

両辺右から B の AND をとる

AB=BB

　=B

一方、

$\overline{A} = \overline{B}$

両辺右から $\overline{B}$ の AND をとると

$\overline{A}\overline{B} = \overline{B}\overline{B}$

$= \overline{B}$

$$\therefore\ AB \vee \overline{A}\overline{B} = B \vee \overline{B}$$
$$= 1$$

証明終わり』

論理代数方程式の解の存在条件

$F(x,y,z,...)=1$
の論理代数方程式で x に関して解が存在するための必要十分条件は

$$F(1) \vee F(0) = 1$$

(ただし、$F(1) \equiv F(1, y, z, \ldots)$ と定義した。)

証明)
$F(x,y,z,...)=1$
x のみに注目する。$F(x) = xF(1) \vee \overline{x}F(0)$ を用いると上式は
$xF(1) \vee \overline{x}F(0) = 1$
あらゆる $F(1)$,$F(0)$の組み合わせに対して上式を満たすような x の値を調べると、

$F(1)$	$F(0)$	x
0	0	解なし
0	1	0
1	1	任意≡P
1	0	1

となるので、
$F(1) \vee F(0) = 1$
の時、x に関して解が存在する。

解の定式化

解が存在するとき、($\Leftrightarrow F(1) \vee F(0) = 1$)その解は、

$$x = \overline{F(0)} \vee F(1)P$$

と表される。

証明)
$x(F1, F0)$ を F1≡F(1), F0≡F(0)で極小項表現すると

$$x(F1, F0) = \overline{F1}\,\overline{F0}\,x(0,0) \vee \overline{F1}F0x(0,1) \vee F1\overline{F0}x(1,0) \vee F1F0x(1,1)$$

先の関係式及び x の組み合わせ表を参照して、
$\overline{F1}\,\overline{F0} = 0\ \because F1 \vee F0 = 1$,　$x(0,1)=0$, $x(1,0)=1$, $x(1,1)=P$ 等を用いると

$$= F1\overline{F0} \vee F1F0P$$
$$= F1\overline{F0} \vee F1F0P \vee \overline{F1}\overline{F0} \quad (\because \overline{F1}\overline{F0} = 0)$$
$$= \overline{F0}(F1 \vee \overline{F1}) \vee F1F0P$$
$$= \overline{F0} \vee F0(F1P)$$
$$= \overline{F0} \vee F1P \quad (\because \overline{x} \vee xy = \overline{x} \vee y)$$

証明終わり』

例) $x \vee a = b$ を満たす x を求めよ

まず F(x)=1 の形に変形する。$(FG \vee \overline{F}\overline{G} = 1)$ をもちいて

$$(x \vee a)b \vee (\overline{x \vee a})\overline{b} = 1$$

(左辺)≡$F(x)$と書くことにすると、

解が存在するための必要十分条件は

$$F1 \vee F0 = 1$$
$$\Leftrightarrow \{(1 \vee a)b \vee (\overline{1 \vee a})\overline{b}\} \vee \{(0 \vee a)b \vee (\overline{0 \vee a})\overline{b}\} = 1$$

$$\Leftrightarrow b \vee ab \vee \overline{a}\overline{b} = 1$$
$$(b \vee \overline{a}\overline{b} = b \vee \overline{a} \text{を用いて})$$
$$\Leftrightarrow b \vee \overline{a} \vee ab = 1 \Leftrightarrow b \vee \overline{a} = 1 \Leftrightarrow a \leq b$$

上記の条件下で解 x は、$x = \overline{F0} \vee F1P$ より

$$x = \overline{(ab \vee \overline{a}\overline{b}\}} \vee bP$$
$$= (\overline{ab})(\overline{\overline{a}\overline{b}}) \vee bP$$
$$= (\overline{a} \vee \overline{b})(a \vee b) \vee bP$$
$$= \overline{a}a \vee \overline{a}b \vee \overline{b}a \vee \overline{b}b \vee bP$$
$$(\overline{b}a = 0 \text{等を用いて})$$
$$= \overline{a}b \vee bP$$

$x \vee a = b$ の解

a	b	x
0	0	0
0	1	1
1	1	任意≡P
1	0	解なし

(問題) $ax \vee b = c$ の解を求めよ。そのとき解が存在する必要十分条件を明示すること。