論理回路理論(A)　渡辺正裕
E-mail: watanabe@pe.titech.ac.jp
http://www.pe.titech.ac.jp/~watanabe/lecture/logic_circuit/index-j.htm

第２回

1. 論理関数とその表現

完全定義論理関数と不完全定義論理関数

例）　完全定義論理関数

x_1	x_2	$F(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	0	1

不完全定義論理関数

x_1	x_2	$F(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	0	*

Don't care な組 ：
関数の定義上、0,1 のどちらに決めてもよい。

論理関数の極小項表現

n 変数論理関数を考える。

$F(x_n,x_{n-1},....,x_1)$

x_k のみに注目して $F(x_k)$ と書くことにすると、

$$F(x_k) = x_k F(1) \vee \overline{x_k} F(0)$$ .....(補題 1.4 教科書 p.10)

証明) $x_k= 0$, $x_k= 1$ をそれぞれ代入して、左右両辺が等しくなることを確かめる。

[極小項表現(シャノン展開)]

$$F(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) = \bigcup_{(\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots\alpha_1)} x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1} F(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1)$$
$$= \bigcup_{F(\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1)=1} x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1}$$

ただし∪は論理和を意味する。

導出)

補題 1.4 を k=1 に適用すると

$$F(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1) = x_1 F(x_n, x_{n-1}, \ldots, 1) \vee \overline{x_1} F(x_n, x_{n-1}, \ldots, 0)$$

k=2 に適用すると

$$= x_2\{x_1 F(x_n, x_{n-1}, \ldots, 1,1) \vee \overline{x_1} F(x_n, x_{n-1}, \ldots, 1,0)\} \vee \overline{x_2}\{x_1 F(x_n, x_{n-1}, \ldots, 0,1) \vee \overline{x_1} F(x_n, x_{n-1}, \ldots, 0,0)\}$$

$$= x_2 x_1 F(1,1) \vee x_2 \overline{x_1} F(1,0) \vee \overline{x_2} x_1 F(0,1) \vee \overline{x_2}\,\overline{x_1} F(0,0)$$

同様に k=3 に適用すると

$$
\begin{aligned}
&= \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1 F(0,0,0) \vee \\
&\quad \bar{x}_3\bar{x}_2 x_1 F(0,0,1) \vee \\
&\quad \bar{x}_3 x_2 x_1 F(0,1,1) \vee \\
&\quad \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 F(0,1,0) \vee \\
&\quad x_3\bar{x}_2\bar{x}_1 F(1,0,0) \vee \\
&\quad x_3\bar{x}_2 x_1 F(1,0,1) \vee \\
&\quad x_3 x_2 x_1 F(1,1,1) \vee \\
&\quad x_3 x_2 \bar{x}_1 F(1,1,0)
\end{aligned}
$$

同様に $k=n$ に適用すると極小項表現の表式が導出される。』

極小項表現を用いれば、あらゆる論理関数は、NOT, AND, OR 演算の組み合わせで表現できる。

(問題) 極小項表現の式を数学的帰納法で証明しなさい。

論理関数 $F(x_n,x_{n-1},....,x_1)$の極小項表現の求め方：

1) F の組み合わせ表を作成
2) F=1 となる変数の組み合わせの 1 つに注目し、それら変数の積をとる。その際、変数=1 ならそのまま、変数=0 なら NOT をとる。
3) F=1 となる変数の組み合わせ全部について上記の和を取る。

例1)　$F(x, y) = x \oplus y$
(排他的論理和)

定義：　$x = y$ の時　$F = 0$
$x \neq y$ の時　$F = 1$

x	y	F	
0	0	0	
0	1	1	$\bar{x}y$
1	1	0	
1	0	1	$x\bar{y}$

$\therefore F(x, y) = x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$

例 2)　3 変数多数決関数 (Majority function)

x_3	x_2	x_1	$F(x_3, x_2, x_1)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F(x_3,x_2,x_1)=\overline{x_3}x_2x_1 \vee x_3\overline{x_2}x_1 \vee x_3x_2\overline{x_1} \vee x_3x_2x_1$$

(問題)　$F(x, y)=x \vee y$ を極小項表現せよ

極小項表現は最も簡単化された表現とは限らない。⇒**簡単化の手法が重要**

(問題) お互いに異なる完全定義 n 変数論理関数は最大何個考えられるか

論理関数の極大項表現

$$F(x_n,x_{n-1},\ldots,x_1)=\prod_{(\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots\alpha_1)} x_n^{\overline{\alpha_n}}x_{n-1}^{\overline{\alpha_{n-1}}}\ldots x_1^{\overline{\alpha_1}}F(\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1)$$
$$=\prod_{F(\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1)=0} x_n^{\overline{\alpha_n}}x_{n-1}^{\overline{\alpha_{n-1}}}\ldots x_1^{\overline{\alpha_1}}$$

証明)

$\overline{F(x_n,x_{n-1},\ldots,x_1)}$ を極小項表現すると

$$\overline{F(x_n,x_{n-1},\ldots,x_1)}=\bigcup_{F(\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1)=1} x_n^{\alpha_n}\,x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\ldots x_1^{\alpha_1}$$

両辺の NOT を取って De Morgan の定理を適用

$$F(x_n,x_{n-1},\ldots,x_1)=\overline{\bigcup_{F(\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1)=1} x_n^{\alpha_n}\,x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\ldots x_1^{\alpha_1}}$$
$$=\prod_{F(\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1)=0}(\overline{x_n^{\alpha_n}} \vee \overline{x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}\ldots.\vee\overline{x_1^{\alpha_1}})$$
$$=\prod_{F(\alpha_n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1)=0}(x_n^{\overline{\alpha_n}} \vee x_{n-1}^{\overline{\alpha_{n-1}}}\ldots.\vee x_1^{\overline{\alpha_1}})$$

(問題 2) 「極小項表現の求め方」にならって、「極大項表現の求め方」を完成させなさい。

1) F の組み合わせ表を作成
2) F=0 となる変数の組み合わせの 1 つに注目し、それら変数の和をとる。その際、変数=0 ならそのまま、変数=1 なら NOT をとる。
3) F=0 となる変数の組み合わせ全部について上記の和を取る。

例)　３変数多数決関数の極大項表現

x_3	x_2	x_1	$F(x_3, x_2, x_1)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F(x_3, x_2, x_1) = (x_3 \vee x_2 \vee x_1)(x_3 \vee x_2 \vee \overline{x_1})(x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_1)(\overline{x_3} \vee x_2 \vee x_1)$$

(問題)　$F(x, y)=xy$ を極大項表現で表せ

x	y	F
0	0	0
0	1	0
1	1	1
1	0	0

$$F = (x \vee y)(x \vee \overline{y})(\overline{x} \vee y)$$

(問題)　$F(x, y) = x \oplus y$ を極大項表現で表せ

x	y	F
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	0	1

$$F = (x \vee y)(\overline{x} \vee \overline{y})$$

論理代数方程式の一般形

あらゆる論理代数方程式は以下の形に帰着する

$$F(x, y, z, \ldots) = 1$$

証明)
$A(x, y, z, \ldots) = B(x, y, z, \ldots)$
なる方程式があったとすると、
A=B
両辺右から B の AND をとる
AB=BB
　=B
一方、
$\overline{A} = \overline{B}$
両辺右から $\overline{B}$ の AND をとると
$\overline{A}\overline{B} = \overline{B}\overline{B}$
　　$= \overline{B}$

$$\therefore\ AB \vee \overline{A}\,\overline{B} = B \vee \overline{B} = 1$$

証明終わり』

論理代数方程式の解の存在条件

$F(x,y,z,...)=1$
の論理代数方程式で x に関して解が存在するための必要十分条件は

$$F(1) \vee F(0) = 1$$
(ただし、 $F(1) \equiv F(1, y, z, ...)$ と定義した。)

証明)
$F(x,y,z,...)=1$
x のみに注目する。 $F(x) = xF(1) \vee \overline{x}F(0)$ を用いると上式は
$$xF(1) \vee \overline{x}F(0) = 1$$
あらゆる $F(1)$,$F(0)$の組み合わせに対して上式を満たすような x の値を調べると、

F(1)	*F*(0)	*x*
0	0	解なし
0	1	0
1	1	任意≡P
1	0	1

となるので、
$F(1) \vee F(0) = 1$
の時、x に関して解が存在する。

解の定式化

解が存在するとき、($\Leftrightarrow F(1) \vee F(0) = 1$)その解は、

$$x = \overline{F(0)} \vee F(1)P$$

と表される。

証明)
$x(F1, F0)$ を F1≡F(1), F0≡F(0)で極小項表現すると

$$x(F1, F0) = \overline{F1}\,\overline{F0}\,x(0,0) \vee \overline{F1}F0x(0,1) \vee F1\overline{F0}x(1,0) \vee F1F0x(1,1)$$

先の関係式及び x の組み合わせ表を参照して、
$\overline{F1}\,\overline{F0} = 0$ ∵ $F1 \vee F0 = 1$,　x(0,1)=0 , x(1,0)=1, x(1,1)=P 等を用いると

$= F1\overline{F0} \vee F1F0P$

$= F1\overline{F0} \vee F1F0P \vee \overline{F1}\,\overline{F0} \quad (\because \overline{F1}\,\overline{F0} = 0)$

$= \overline{F0}(F1 \vee \overline{F1}) \vee F1F0P$

$= \overline{F0} \vee F0(F1P)$

$= \overline{F0} \vee F1P \quad (\because \bar{x} \vee xy = \bar{x} \vee y)$

証明終わり』

例)　$x \vee a = b$ を満たす x を求めよ

まず $F(x)=1$ の形に変形する。$(FG \vee \overline{F}\,\overline{G} = 1)$ をもちいて

$(x \vee a)b \vee (\overline{x \vee a})\bar{b} = 1$

(左辺)≡$F(x)$と書くことにすると、

解が存在するための必要十分条件は

$F1 \vee F0 = 1$

$\Leftrightarrow \{(1 \vee a)b \vee (\overline{1 \vee a})\bar{b}\} \vee \{(0 \vee a)b \vee (\overline{0 \vee a})\bar{b}\} = 1$

$\Leftrightarrow b \vee ab \vee \bar{a}\bar{b} = 1$

$(b \vee \bar{a}\bar{b} = b \vee \bar{a}$を用いて$)$

$\Leftrightarrow b \vee \bar{a} \vee ab = 1 \Leftrightarrow b \vee \bar{a} = 1 \Leftrightarrow a \le b$

上記の条件下で解 x は、$x = \overline{F0} \vee F1P$ より

$x = \overline{(ab \vee \bar{a}\bar{b})} \vee bP$

$= (\overline{ab})(\overline{\bar{a}\bar{b}}) \vee bP$

$= (\bar{a} \vee \bar{b})(a \vee b) \vee bP$

$= \bar{a}a \vee \bar{a}b \vee \bar{b}a \vee \bar{b}b \vee bP$

$(\bar{b}a = 0$等を用いて$)$

$= \bar{a}b \vee bP$

$x \vee a = b$ の解

a	b	x
0	0	0
0	1	1
1	1	任意≡P
1	0	解なし

(問題)　$ax \vee b = c$ の解を求めよ。そのとき解が存在する必要十分条件を明示すること。