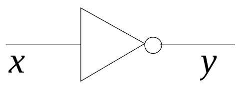
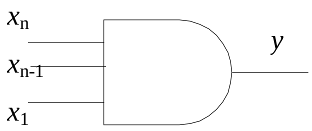
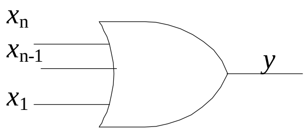
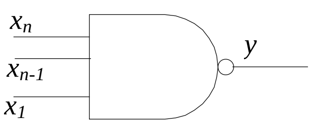
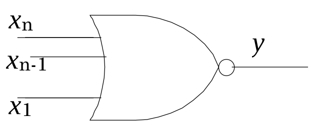
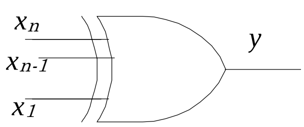
第 3 回

1. 論理関数の分解と合成

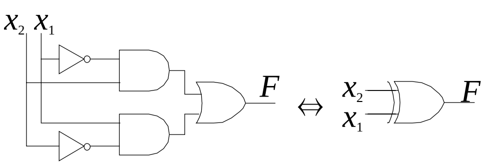
基本論理ゲートの定義

基本論理ゲート	回路シンボル	論理式表現
NOT		$y = \overline{x}$
AND		$y = x_n x_{n-1} \dots x_1$
OR		$y = x_n \vee x_{n-1} \vee \dots \vee x_1$
NAND		$y = \overline{x_n x_{n-1} \dots x_1}$ n=1 の時は NOT と等価
NOR		$y = \overline{x_n \vee x_{n-1} \vee \dots \vee x_1}$ n=1 の時は NOT と等価
Ex-OR		$y = x_n \oplus x_{n-1} \oplus \dots \oplus x_1$

例 1） Ex-OR を NOT-AND-OR で表す

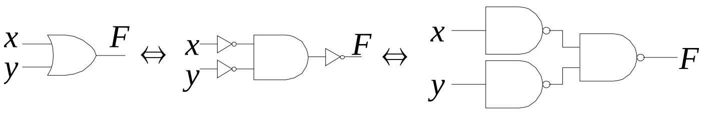
$$F(x_2, x_1) = x_2 \oplus x_1 = \overline{x}_2 x_1 \vee x_2 \overline{x}_1$$

x_2	x_1	F
0	0	0
0	1	1
1	1	0
1	0	1

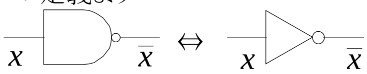


（問題） OR を AND と NOT で表し、シンボル表示しなさい。また、NAND のみでシンボル表示しなさい。

$$F = x \vee y = (\overline{\overline{x \vee y}}) = (\overline{\bar{x}\,\bar{y}}) \quad (\because \textit{De Morgan})$$



∵定義より



OR は AND と NOT のみで表せる → OR は NAND のみでも表せる

（問題） AND を OR と NOT で表し、シンボル表示しなさい。また、NOR のみで表示しなさい。

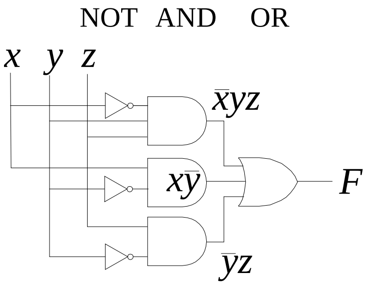
NOT-AND-OR 形式による論理関数の合成

NOT-AND-OR 形式とは

$F = \bar{x}yz \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z$

などのように、いくつかの AND 項を OR で結んだ形式。（積項の和形式）

シンボル表示すると、NOT-AND-OR の3段構成になっているのがわかる。



極小項表現は自動的に NOT-AND-OR 形式になっている。

NOT-AND-OR 形式による論理関数の合成法

1)論理関数 F の定義より、組み合わせ表を作成。

2)極小項表現を求める。(この段階で自動的に NOT-AND-OR 形式で表現されている)

3)必要なら回路シンボル表示する

論理関数の簡単化の基本

簡単化の基本式

$$\boxed{xP \vee \bar{x}P = P}$$

（ただし、P は2値変数の AND 項）

例） $\bar{x}yz \vee xyz = yz$

論理関数の合成および簡単化の手順

1) 論理関数 F の組み合わせ表を作成
2) 極小項表現を求める
3) ある1つの変数のみ肯定、否定が異なり、残りすべての変数は共通である2項に注目する
4) 共通の部分だけ残す

注1)ドントケアな組を持つ場合は、その値を簡単化に都合よく考えて良い。(Don't care の定義)
注2) 上記 2)の操作では、ある項が複数回用いられても良い。$\because x = x \vee x$

例) 3変数多数決関数の簡単化

x_3	x_2	x_1	$F(x_3, x_2, x_1)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F(x_3, x_2, x_1) = \overline{x_3}x_2x_1 \vee x_3\overline{x_2}x_1 \vee x_3x_2\overline{x_1} \vee x_3x_2x_1$$

x_3x_1　　x_3x_2

$$F(x_3, x_2, x_1) = \boxed{\overline{x_3}x_2x_1} \vee \boxed{x_3\overline{x_2}x_1} \vee \boxed{x_3x_2\overline{x_1}} \vee \boxed{x_3x_2x_1}$$

x_2x_1

$$= x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$$

先の手順を、直感的に考えやすい図表で考える。

Karnaugh map(カルノー図)

組み合わせ表の行列表示: マス目には論理関数の値

(a)2 変数

x_2	x_1	$F(x_2,x_1)$
0	0	ア
0	1	イ
1	1	ウ
1	0	エ

⇔

x_2 \ x_1	0	1
0	ア	イ
1	ウ	エ

(b)3 変数

お互いに変数の値が 1 つだけ異なる
組み合わせ

x_3 \ x_2x_1	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

1 つの極小項 $x_3\overline{x_2}x_1$ に対応

c) 4 変数

x_4x_3 \ x_2x_1	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

[カルノーマップにおける座標の付け方]
1) 隣接する座標は1つの変数のみ異なる。
2) マス目領域の中央を対称軸として鏡像位置も1つの変数のみ異なる。
3) 上記対称軸で分割された部分領域にも 2)が再帰的に適用される。

[項のまとめ方 ＝ 極小項表現の簡単化]
1) 隣接、あるいは鏡像関係にある 1 をまとめる。
2) まとめたグループが他のグループと鏡像位置にあればこれらをまとめる。
3) 値が変化しない変数の積を取る。

例1) 3変数多数決関数 $Maj(x_3, x_2, x_1)$

x_3	x_2	x_1	$Maj(x_3, x_2, x_1)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

⇔

Karnaugh map

x_3 \ x_2x_1	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

P_2 P_1 P_3

$$P_1 = x_3\overline{x_2}x_1 \vee x_3x_2x_1 = x_3x_1$$
$$P_2 = x_2x_1$$
$$P_3 = x_3x_2$$
$$Maj = P_1 \vee P_2 \vee P_3 = x_3x_1 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3$$

注1) 1つのマス目は何回使っても良い。
注2) ドントケアな項がある場合は都合の良い場所だけ1と見なして良い。

例 2) ドントケアな項を含む場合

x_4x_3 \ x_2x_1	00	01	11	10
00	1	1		1
01	1	1		
11	*	*	*	*
10		1	*	*

P_1 P_2 P_3

まとめ方の1例

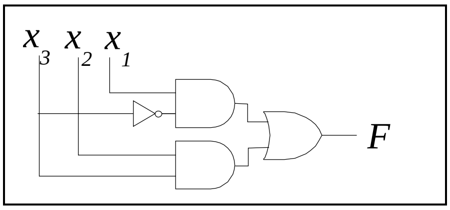
$$P_1 = \overline{x_2}\,\overline{x_4}$$
$$P_2 = \overline{x_2}x_1$$
$$P_3 = \overline{x_3}x_2\overline{x_1}$$
$$F = P_1 \vee P_2 \vee P_3 = \overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_2}x_1 \vee \overline{x_3}x_2\overline{x_1}$$

(問題)
3 変数論理関数 $F(x_3, x_2, x_1)$が以下のように定義されている。
$x_3=0$ の時　$F=x_1$
$x_3=1$ の時　$F=x_2$
このとき、F に関して
1)極小項表現を求めよ。
2)簡単化して回路シンボル表示しなさい。

x_3 \ x_2x_1	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	0	0	1	1

まとめ方の1例

$$F = \overline{x_3}x_1 \vee x_3x_2$$



(問題)
4 変数のうち 3 変数以上が 1 の時 F=1 となる関数 F の
1)極小項表現を求めなさい。
2)簡単化して NOT-AND-OR 形式で回路シンボル表示しなさい。

x_4x_3 \ x_2x_1	00	01	11	10
00				
01			1	
11		1	1	1
10			1	

$$F = x_4x_3x_2 \vee x_4x_3x_1 \vee x_4x_2x_1 \vee x_3x_2x_1$$

(問題)
4 変数のうち 2 変数以上が 1 の時 F=1 となる関数 F の
3)極小項表現を求めなさい。
4)簡単化して NOT-AND-OR 形式で回路シンボル表示しなさい。

x_4x_3 \ x_2x_1	00	01	11	10
00			1	
01		1	1	1
11	1	1	1	1
10		1	1	1

まとめ方の1例

$$F = x_4x_3 \vee x_4x_2 \vee x_4x_1 \vee x_3x_2 \vee x_3x_1 \vee x_2x_1$$